17世紀日本と18-19世紀西洋の行列式、終結式及び判別式 (数学史の研究)

後藤, 武史; 小松, 彦三郎

数理解析研究所講究録 1392 巻 2004 年 117-129

17世紀日本と18–19世紀西洋の行列式、終結式及び判別式

後藤武史* (Takefumi Goto) - 小松彦三郎 (Hikosaburo Komatsu)
東京理科大学理学部 Faculty of Science, Science University of Tokyo

17 世紀の日本人が世界にさきがけて行列式を考え出したということは今では広く知られるようになった。しかし、和算家が何のために、またどのようにして行列式を使ったかということについては和算研究者の間でもまだ十分に理解されていないように思われる。ここでは、簡単に彼らの計算を追って、それが 18–19 世紀のヨーロッパで生まれた二つの代数方程式から未知数を消去する理論と同じであることを示す。

1. 中国からの数学の輸入

日本は中国から２度数学を輸入した。最初は卑弥呼の時代から飛鳥時代にかけて導入した実用数学である。巨大古墳にみられるような大土木事業は相当程度の数学がなくてはできない。その内容は、今日まで伝えられている「九章算術」[1] で察することができる。この本は漢代より官吏養成の学校で使われた教科書であり、我が国平安朝でも同じ用途で使われていた。この第７章「盈不足」では２元連立１次方程式、第８章「方程」では多元連立１次方程式、最後の第９章「句股」では２次方程式が扱われている。

２度目の輸入は1600 年頃にあった。このときに入ってきたものは、朱世傑の「算学啓蒙」[3] と楊輝の「楊輝算法」[2] による天元術、すなわち数値係数の１元代数方程式と、程大位の「算法統宗」[4] による珠算である。

「算学啓蒙」などでは方程式

(1)
$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$$

を数係数 a_i を表す算木の配列を縦に並べた

(2)
$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

で表した。未知数 x は書かない。ここでは便宜上数字 a_i を横に並べて

(3)
$$[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n]$$

とする。定数係数 a_0 を「実」、１次の係数 a_1 を「方」、２次の係数 a_2 を「廉」、$\cdots$ 、最高次の係数 a_n を「隅」という。

数値 ξ が与えられたとき、ξ だけ平行移動した方程式

(4)
$$f(x+\xi) = a_0' + a_1'x + \cdots + a_n'x^n = 0$$

*現在は東京都江戸川区立瑞江中学校

の係数 a'_i は算木の操作で容易に計算することができた。もし新しい「実」a'_0 が 0 となれば、ξ は (1) の根である。そうならない場合も新しい「実」a'_0 の絶対値が小さくなるように次々に平行移動する ξ を 1 桁づつ決めていけばいくらでも高い精度で根を求めることができる。

この際、新しい「方」a'_1 は $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の ξ での値になることに注意する：

$$a'_1 = f'(\xi) = a_1 + 2a_2\xi + \cdots + na_n\xi^{n-1}. \tag{5}$$

江戸時代には、藩校などの公教育ばかりでなく、寺子屋での教育など大衆教育も始まった。特に庶民の教育では数学の比重が大きく、そのための教科書が数多く出版された。なかでも、「算法統宗」を上手に換骨奪胎した吉田光由の「塵劫記」[5] はベストセラーとなり版を重ねた。次第に、より高度な数学書も出版されるようになる。そのうちに、「塵劫記」の、吉田光由自身が関わった最後の版から始まって、巻末に解答のない問題を載せ、次の人がその解答を出版し、また問題を残すということが流行した。これを遺題継承という。すぐに問題は難しくなった。特に、澤口一之の「古今算法記」[6] の遺題 15 問は難問ぞろいであり、例えば、その第 14 問を解くには 1548 次の方程式を必要とした。

日本に輸入された中国の本 [2], [3] は数係数の 1 元方程式しか扱っていない。方程式 (2) には未知数 x を表す記号さえない。しかし、澤口の問題のように複雑なものを、たった 1 つの未知数に対する方程式として直接書き表すことは難しい。關孝和 (1642?–1708) はいくつもの文字を含む代数方程式の記号を確立した最初の人であり、方程式の係数 a_i に一般の多項式が現れることを許した。彼はこうして澤口の遺題を解き、その解答を「発微算法」[7] として発表した。しかし、この新しい方法の説明がなかったためすぐには一般に理解されなかった。後に、弟子の建部賢弘 (1664–1739) がその解説 [12] を出版してから、和算家たちはいくつもの未知数をもつ連立多次方程式を自在に扱えるようになった。これに並行して、關、田中由真 (1651–1719) たちは未知数消去の一般理論について組織的な研究を行い、世界に先駆けて終結式、行列式などを発見した。1690 年に出版された井關知辰の「算法発揮」[14] はこれについての世界最初の刊本である。

2.「解伏題之法」の行列式と終結式

關が導入した多項式の表示は「傍書法」といい、数係数を表す算木の表示の右に文字を書き並べるものである。これについては [8], [12] などがあるが、行列式と終結式が最初に現れるのは關の手書きの本「解伏題之法」[10] である。

關は数学の問題を、算術で解くことのできる「見題」、1 つの未知数に関する方程式で解くことのできる「隠題」と 2 つ以上の未知数が必要な「伏題」の 3 つに分類し、それぞれを解く法を本にしている。「解伏題之法」はこの三部作の最後である。現在残っている写本には 1683 年の日付がある。これは「大成算經」[15] の編集が始まったとされる時期と一致する。「解伏題之法」の書き方は簡略すぎて、これだけを読んで理解することは難しい。また、終わりのほうには誤りもある。われわれは、これは「大成算經」のためのノートとして建部賢明 (1661–1716)、賢弘兄弟に与えたものの手控えではなかったかと想像している。「大成算經」20 巻では主に巻之十七で行列式と終結式が扱われている。こちらには間違いがないのに、昔から今に至るまで「解伏題之法」の間違いばかり取り沙汰されるのは奇妙である。

和算の概説書を読むと、どの本も殆んどすべて「解伏題之法」は行列式を導入し、その展開

を論じた本といっているが、關が論じたのは、題名の通り、2つの方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0, \tag{6}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m = 0 \tag{7}$$

が与えられたとき、これから未知数 x を消去すること、すなわち、これらの方程式を共に満たす根 $x = \xi$ があるための条件を、係数 a_i, b_j に関する方程式として定めることであったのであり、行列式はその手段にすぎない。關は行列式に正式に名前をつけることもしていない。

方程式 (1) を (2) のように表したことから分かるように、中国の伝統では多項式 $f(x)$ と方程式 $f(x) = 0$ は区別できなかった。關の時代、ようやく傍書法により、方程式の係数 a_i として x とは異なる変数 y の多項式 $a_i(y)$ が許されるようになり、それゆえ補助変数 x を消去することも問題になったわけであるが、それでもなお、多項式をそれ自体として扱うことはできなかった。「解見題之法」[8] の主題は、傍書法を用いて、多項式あるいは図形の面積、体積等についての公式を述べることであった。しかし、肝心の等号 "=" も括弧 "(", ")" もなかったため

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

程度のことをいうのにも大変な苦労をしている。これは「大成算經」[15] になっても同じで、加減法や乗法の可換律、結合律を述べるだけに信じられない紙数を使っている。割り算の記号、根号がなかった点も同時代のヨーロッパ、例えば Descartes の Géométrie [40] と比べると見劣りがする。

それ故、關が関心をもったのは、行列式が 0 に等しいという方程式であったのであり、多項式をそれ自身として考えることができない以上、行列式そのものに名前を付けなかったのは当然といえば当然である。

方程式 (6), (7) を、それぞれ、「前式」、「後式」と呼ぶ。一般性を失うことなく、$n \geq m$, $a_n \neq 0$ かつ $b_m \neq 0$ としてよい。關はこれらの方程式から、まず、「換式」と呼ぶ n 個の n 次未満の方程式を構成する。ただし、方程式しか考えない關は符号の選び方に無頓着であったため、ここでは一定の方法で符号を決めて定義する。第1の換式

$$h_1(x) = c_{10} + c_{11}x + \cdots + c_{1,n-1}x^{n-1} = 0 \tag{8_1}$$

は $f(x)$ と $x^{n-m}g(x)$ から n 次の項を消去した

$$h_1(x) = b_mf(x) - a_nx^{n-m}g(x) \tag{9_1}$$

とする。$1 < i \leq m$ に対する i 番目の換式

$$h_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}x + \cdots + c_{i,n-1}x^{n-1} = 0 \tag{8_i}$$

は $i-1$ 番目の換式 $h_{i-1}(x)$, $f(x)$ 及び $x^{n-m}g(x)$ を用いて

$$h_i(x) = xh_{i-1}(x) + b_{m-i+1}f(x) - a_{n-i+1}x^{n-m}g(x) \tag{9_i}$$

と定義する。これは、また、

$$\begin{aligned} h_i(x) = {} & (b_{m-i+1} + b_{m-i+2}x + \cdots + b_mx^{i-1})f(x) \\ & - (a_{n-i+1} + a_{n-i+2}x + \cdots + a_nx^{i-1})x^{n-m}g(x) \end{aligned} \tag{10_i}$$

と表されることから分かるように、n 次未満の多項式である。残りの $n-m$ 個の換式は

$$h_i(x) = x^{i-m-1}g(x) = 0, \quad m+1 \leq i \leq n, \tag{11}$$

で定義する。

こうして n 個の n 次未満の方程式

$$(12)\qquad \begin{cases} c_{10}+c_{11}x+\cdots+c_{1,n-1}x^{n-1}=0 \\ c_{20}+c_{21}x+\cdots+c_{2,n-1}x^{n-1}=0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ c_{n0}+c_{n1}x+\cdots+c_{n,n-1}x^{n-1}=0 \end{cases}$$

が得られる。(3) と同じ記法を用いるならば、

$$(13)\qquad \begin{bmatrix} c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ c_{20} & c_{21} & \cdots & c_{2,n-1} \\ & & \vdots & \\ c_{n0} & c_{n1} & \cdots & c_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

と $n\times n$ 行列で表される。

この行列、あるいは方程式系の行列式（上にも述べたように關は明確に用語を与えていないが、強いていうならば逐式交乗）を、關は (12) の第1の方程式に c_{10} の余因子を掛け、第2の方程式に c_{20} の余因子を掛け、$\cdots$、最後の方程式に c_{n0} の余因子を掛けて、これらの方程式を全部足しあわせて得られる単独方程式としている。ここで c_{i0} の余因子というのはもとの行列 (13) から第 i 行と第0列を除いて得られる小行列の行列式に $(-1)^{i-1}$ を掛けたものである。このようにして得られる単独方程式は定数項が行列式に等しく、他の項の係数は全部0となるから、この定義は実質的にわれわれが今日普通に用いる行列式の定義と一致する。

なお、これは關による行列式の定義であって行列式の展開ではないことに注意する。この定義は、もちろん、任意の $n\times n$ 行列 (13) の場合に通用する。「解伏題之法」のこの部分をどのように読むかについてはいろいろ議論があったが、三上義夫 [27, 第13節末尾の訂正] も加藤平左エ門 [33, p. 140 以下] も最終的にはこのように読んでいる。Horiuchi [35, p. 192] は加藤を引用している。

この単独方程式、すなわち、われわれの意味での行列式を0に等しいと置いた方程式は明らかに方程式系 (12) の結論であるから、これらの方程式に共通の根があるならば、得られた行列式は0でなければならない。特に、始めの方程式の係数が x 以外の文字に関する多項式であるとき、この単独方程式はこれらの文字だけに関する方程式、すなわち、(12) から x を消去した方程式になる。

(12) が換式によって得られる方程式系のとき、このようにして得られる行列式は

$$(14)\qquad \mathcal{R}(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

に等しい。この行列式はヨーロッパで方程式系 (6), (7) の「終結式」と呼ばれているものと形の上では同じである。ただし、ヨーロッパでは多項式を降冪の順に表し、日本では昇冪の順に表すので、$(-1)^{nm}$ だけの因子が掛かることに注意する。

これを証明するには、(14) の左から次の行列式を掛ければよい：

$$
(15)\qquad
\begin{vmatrix}
b_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} & -a_n & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-m+1} & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & 0 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{vmatrix}.
$$

明らかにこの行列式は ${b_m}^m$ に等しい。行列の積の行列式は行列式の積になることに注意して、行列として掛算を実行すれば、最初の m 行として換式 $h_i(x)=0$ の係数が得られ、後の $n-m$ 行として $x^{i-m-1}g(x)=0$ の係数が得られる。行列

$$
\begin{pmatrix}
b_m & 0 & \cdots & 0 \\
b_{m-1} & b_m & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix}
\quad と \quad
\begin{pmatrix}
a_n & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
a_{n-m+1} & \cdots & a_{n-1} & a_n
\end{pmatrix}
$$

は共に、対角線の下に 1 が並ぶ冪零行列の多項式になっているから互いに交換可能である。これからも、最初の m 個の換式 $h_i=0$ の n 次以上の係数がすべて消えることがわかる。それゆえ、換式の行列式は積行列式の n 次の主小行列式となり、積行列式は換式の行列式と ${b_m}^m$ の積に等しい。零でない因子 ${b_m}^m$ を相殺すれば、証明すべき次の等式が得られる：

$$
(16)\qquad
\mathcal{R}(f,g)=
\begin{vmatrix}
c_{10} & c_{11} & & \cdots & \cdots & & c_{1,n-1} \\
c_{20} & c_{21} & & \cdots & \cdots & & c_{2,n-1} \\
 & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\
c_{m,0} & c_{m,1} & & \cdots & \cdots & & c_{m,n-1} \\
b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & 0 \\
0 & & \ddots & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_m
\end{vmatrix}.
$$

また、ξ_i 及び η_j をそれぞれ (6) と (7) の根全体：

$$
(17)\qquad f(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i),\quad g(x)=b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\eta_j)
$$

とすれば、

$$(18)\quad \mathcal{R}(f,g) = a_n{}^m b_m{}^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\eta_j - \xi_i) = b_m{}^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j) = (-1)^{mn} a_n{}^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$$

となることも容易に証明することができる [48, 53, 54]。したがって、

$$(19)\qquad \mathcal{R}(f,g) = 0$$

は (6) と (7) が係数 a_i, b_j 全体を含むある代数的閉体において共通根をもつための必要十分条件になる。

1690年に出版された井關知辰の「算法発揮」[14] には $n = m \leq 6$ の場合の公式 (16) と ≤ 5 の場合の完全な展開式がある。これを使って実際問題を解くこともしている。しかし、關の仕事の意義は、むしろ連立代数方程式は1つずつ未知数を消去することによって必ず1元代数方程式に帰着できることを確認したことにあると思われる。事実、これ以後、澤口のような遺題は出されなくなった。

3.「解伏題之法」の交式斜乗

關は「解伏題之法」で $n = 2, 3, 4$ までの行列式を定義に従って計算した後、これでは n が大きくなると項数が増えて分かりにくいので「交式斜乗」でこれに代えるといって $n = 3$ の場合のサラスの方法を一般化した計算法を述べている。しかし、關が書いた通りに計算したのでは $n = 5$ のとき答えはいつも 0 になってしまい、明らかに誤っている。これに対して、關流二伝と称される松永良弼 [16] から始まり、菅野元健 [18]、石黒信由 [19] など多くの「訂正」が発表されており、近代の数学史家もそれに引きずられた解釈をしている 。しかし、その多くは關の真意から遠く掛け離れているように思われるので、ここでもう一つの訂正を試みる。

そのため、$n = 4$ の場合の關の定義式による計算を再現することから始める。

$$(20)\quad \begin{bmatrix} D & C & B & A \\ H & G & F & E \\ L & K & J & I \\ P & O & N & M \end{bmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{array}{ccccccc} D+ & Cx+ & Bx^2+ & Ax^3 & = & 0 \\ H+ & Gx+ & Fx^2+ & Ex^3 & = & 0 \\ L+ & Kx+ & Jx^2+ & Ix^3 & = & 0 \\ P+ & Ox+ & Nx^2+ & Mx^3 & = & 0 \end{array}$$

を考える。關は二十八宿の星座を表す文字を使っているが、われわれに馴染がないのでここでは代わってアルファベットの大文字を使うことにする。

これに対し關は、第1式に D の余因子の1項 GJM を掛けて得られる

$$[DGJM\ \text{生}\ \mid 0 \mid CGJM \mid BGJM \mid AGJM]$$

から始めて、24 項を次々に書き並べてゆく。「生」はこの項が加えられる項であることを意味する。反対に、減ずる項は「尅」で表す。次の 0 は、続く x, x^2, x^3 の係数が同名のもの同士で相殺されて消えることを意味する。原文には同名を示す番号が付けられているがこれは略した。以下、 $\mid 0 \mid$ 以後を略して、全部の項を書き並べる。この際、關が計算したときと同じ順序と思われるものに復元して行う：

(21)

$DGJM$ 生	$DOJE$ 尅	
$HKNA$ 尅	$HCNI$ 生	1 2 3 4
$LOBE$ 生	$LGBM$ 尅	
$PCFI$ 尅	$PKFA$ 生	
$DOFI$ 生	$DGNI$ 尅	
$HCJM$ 尅	$HKBM$ 生	1 3 4 2
$LGNA$ 生	$LOFA$ 尅	
$PKBE$ 尅	$PCJE$ 生	
$DKNE$ 生	$DKFM$ 尅	
$HOBI$ 尅	$HOJA$ 生	1 4 2 3
$LCFM$ 生	$LCNE$ 尅	
$PGJA$ 尅	$PGBI$ 生	

關孝和全集の原本を始め殆んどの写本で、各ブロックの中での配列はこの通りであるが、ブロックの位置は、上段右と中段左のブロック、中段右と下段左のブロックで入れ替わっている。それにも拘わらず、これを正しい配列と考える理由は、上段二つのブロックの積を行列 (20) に図示すれば、左は主対角線およびそれと平行なもの、右は反対角線およびそれと平行なものからなり、サラスと類似の図になるからである。同様に、中段および下段はそれぞれ行列

$$(22)\qquad \begin{bmatrix} D & B & A & C \\ H & F & E & G \\ L & J & I & K \\ P & N & M & O \end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix} D & A & C & B \\ H & E & G & F \\ L & I & K & J \\ P & M & O & N \end{bmatrix}$$

に対して同様の積をとってできる。行列 (22) はそれぞれ (20) の 1, 3, 4, 2 列および 1, 4, 2, 3 列からなる。(21) の右の数列はこれを注意したもので原文にあるのではない。

さて、原文では、次いで「交式」という節に入り、「從換三式起換四式從換四式起換五式逐如此換二式換三式者不及交式也順逆共遞添一得次乃式數奇者皆順偶者順逆相交也」という文の後に

(23)

	順	順	順		順	逆	順	逆						
換	1	2	3	換	1	2	3	4	換	1	2	3	4	5
三				四	1	3	4	2	五	1	3	2	5	4
式				式	1	4	2	3	式	1	4	5	2	3
										1	5	4	3	2
										1	2	4	5	3
										1	4	2	3	5
										1	5	3	2	4
										1	3	5	4	2
										1	2	5	3	4
										1	5	2	4	3
										1	3	4	2	5
										1	4	3	5	2

という数表が続く。

そして次の「斜乗」の節では、「交式をそれぞれ施し、左右より斜乗して生尅を得る。換式数が奇であれば [われわれの表現では主対角線に沿っての] 左斜乗を生とし、右斜乗を尅とする。偶であれば左斜乗右斜乗共に生尅が相交じる。」という説明の後に、換二式から換五式までの斜乗のようすが図示されている。

特に、$n=5$ の場合、すなわち、一般の方程式

$$(24)\qquad \begin{bmatrix} E & D & C & B & A \\ J & I & H & G & F \\ O & N & M & L & K \\ T & S & R & Q & P \\ Y & X & W & V & U \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{cccccc} E+ & Dx+ & Cx^2+ & Bx^3+ & Ax^4 & =0 \\ J+ & Ix+ & Hx^2+ & Gx^3+ & Fx^4 & =0 \\ O+ & Nx+ & Mx^2+ & Lx^3+ & Kx^4 & =0 \\ T+ & Sx+ & Rx^2+ & Qx^3+ & Px^4 & =0 \\ Y+ & Xx+ & Wx^2+ & Vx^3+ & Ux^4 & =0 \end{array}$$

に対して、これは (21) 式の上段に相当するものが

$$(25)\qquad \begin{array}{ll} EIMQU\ \text{生} & EXRLF\ \text{尅} \\ JNRVA\ \text{生} & JDWQK\ \text{尅} \\ OSWBF\ \text{生} & OICVP\ \text{尅} \\ TXCGK\ \text{生} & TNHBU\ \text{尅} \\ YDHLP\ \text{生} & YSMGA\ \text{尅} \end{array} \qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

になると言っているのであるが、実際には右斜乗に相当する右のブロックの各積も全て生となり、正しくない。$n=2,3,4$ の場合に確かめたのだから、$n=5$ でも正しいだろうと考えたのは闕の速断であった。この誤りは菅野 [18] と石黒 [19] によって指摘されている。

これを正すには、右ブロックの各々の積を、各 E,J,O,T,Y は変えないで他の因子を余行列式の中から積の符号が負となるように一つづつ取り出して置き換えておけばよい。計算の都合からゆけば、最初の3つの因子を左ブロックと同じにして

$$(25')\qquad \begin{array}{ll} EIMQU\ \text{生} & EIMVP\ \text{尅} \\ JNRVA\ \text{生} & JNRBU\ \text{尅} \\ OSWBF\ \text{生} & OSWGA\ \text{尅} \\ TXCGK\ \text{生} & TXCLF\ \text{尅} \\ YDHLP\ \text{生} & YDHQK\ \text{尅} \end{array} \qquad 1\ 2\ 3\ 4\ 5$$

とするのがよいが、もちろん、他の選び方をしてもよい。その後、(23) に従って列を取替えた行列について同じ計算をし、全部を足し合わせれば5次の行列式が求まる。

「交式」の表 (23) は n 個の文字 $\{1,2,\cdots,n\}$ の1を固定する偶置換全体の表である。松永 [16] は、「交式」の説明文を低次の交式から高次の交式を生成する方法を述べたものであるとし、それに従って5次の交式の表の訂正を行っているが、これは全くの見当違いである。

(12) の定数項 c_{i0} の余因子は符号を除けば $n-1$ 次の行列式であり、これを計算するには符号の異なる2つの積をとる場所を決めておき、列（または行）の偶置換を行ってこれら2つの積を計算し、偶置換全部について足し合わせればよい。

換三式等を3次の [多項式としての] 行列式等を意味するとすると、「交式」の説明文は「3次の行列式によって4次の行列式を定め、4次の行列式によって5次の行列式を定める」等となって意味が通じる。關はこれによって定義も計算も行ったと考えるのが自然である。

和算家の中にも久留島義太や戸板保佑 [17] のように、われわれと同じ解釈をした人がいなかったわけではない。しかし、他の和算家にとって、式とは方程式を意味し、「交式」といえば方程式を交換すること、われわれの表現では行を交換すること以外は考えにくかった。幸か不幸か、行列式は行を互換しても列を互換しても符号が変わるだけであり、誤解を正すことなく正しい計算をすることができる。その結果、關の理論は理解されないまま、計算法としては、第1行に関する Vandermonde の展開が使われるようになった。井關知辰の「算法発揮」[14] の巻之上はこの方法で終結式 $\mathcal{R}(f,g)$ を計算するマニュアルである。何故このようにすれば未知数を消去したことになるかという説明は一切ない。「大成算經」[15] の巻之十七も本質的に同じである。

4. ヨーロッパの行列式と終結式

行列式は、ヨーロッパでは連立1次方程式から未知数を消去するために導入されたと信じられているが、これは俗説に過ぎない。連立1次方程式を解くには普通の消去法が一番能率が良く、なにもわざわざ行列式のような複雑なものを用いる必要はない。後代に何の影響を与えることのなかった Leibniz の理論を除いて、行列式が初めて現れたとされる 1750 年の Cramer の本 [43]、1764 年の Bézout の論文 [45] の主題は、共に代数方程式の未知数消去であった。特に、Bézout [45] は「解伏題之法」と殆んど変わらない方法で（多項式としての）行列式と終結式を定義し、これらを用いて消去の理論を展開している。Cramer, Bézout 共に一番関心があったのは消去して得られる方程式（19）の本来の未知数 y に関する次数であった。Bézout の論文の表題はまさしく「終結方程式の次数についての研究」である。こうして Bézout は平面上の2つの代数曲線の交点の個数を計算することができた。「解伏題之法」の第3章「定乗」でも關は Cramer と同様の発想で次数の評価をしている。

關が最初に澤口の遺題を解いた「発微算法」[7, 12] では行列式を使っていない。ヨーロッパでも、もちろん、行列式を使わない消去の方法が発見されている。Newton [41] と Euler [42] は、2つの方程式 (6), (7) が与えられたとき、(9_1) で定義される最初の換式 $h_1(x)$ と

$$k_1(x) = (b_0 f(x) - a_0 g(x))/x \tag{26_1}$$

が次数が一つ下がった多項式になることを利用して、順次次数の低い2つの方程式を作り、最後は1次方程式にして消去した。この方法は和算でも使われたが、3次以上の方程式に対しては消去した結果となる方程式が無縁根をもつ欠陥がある。

1764 年に発表された Euler の論文 [44] はこれを克服して (14) で定義された $\mathcal{R}(f, g)$ が 0 となることと同等な条件を与えた。Euler の方法は (6), (7) が共通根 ω をもてば

$$\begin{aligned} f(x) =&(x-\omega)(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}) \\ g(x) =&(x-\omega)(\beta_0 + \cdots + \beta_{m-1}x^{m-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

と因数分解できることを利用し、

$$f(x)(\beta_0 + \cdots + \beta_{m-1}x^{m-1}) = g(x)(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1}) \tag{28}$$

の両辺の係数を等しいとおいた $n+m$ 個の 1 次方程式から $\alpha_0,\cdots,\beta_{m-1}$ を消去するものである。根と因数分解 (27) の関係を知らなかった和算家たちにこれは不可能な方法である。

（符号を除いて）終結式の公式 (14) は Sylvester の 1840 年の論文 [47] が初出とされている。直後に Cauchy [48] は以上の歴史を振り返り、Sylvester の行列式はせいぜい $n=m=2$ のときしか使えない。それ以上になれば [關-]Bézout の行列式を使うほかなく、それも次数が高いときは計算不可能であるといって、（符号を除いて）(18) を証明し、これと根と係数の関係を使うのがもっとも実際的であると論じた。実際 Cayley [51] が、次数 $m\leq n\leq 4$ の一般代数方程式の終結式を計算したときにはこの方法を用いた。$n=m=4$ のときは 219 項ある。Cayley 自身はこの方法は Hirsch [46] によるといっている。

なお、行列式が determinant と呼ばれるようになったのは、Gauss の Disquisitiones Arithmeticae の用語を流用した Jacobi に始まり、1843 年の Cayley の論文 [49] あたりから一般に広まったようである。この論文の始めには短い歴史が書いてある。

5. 和算の判別式

關は「開方飜變之法」[11] で代数方程式の判別式を導入し、「大成算經」[15] の巻之三に引き継がれた。關の用語では「適盡方級法」という。(1) のある根 ξ に対し、それだけ平行移動した方程式 (4) を計算したとき、方級 (5) が消える条件という意味である。これは、もとの方程式 $f(x)=0$ と $f'(x)=0$ が共通根を持つということであるから、

$$\mathcal{R}(f,f')=0 \tag{29}$$

がこの条件となる。

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)\implies f'(x)=a_n\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x-\xi_j) \tag{30}$$

ゆえ

$$\mathcal{R}(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{2n-1}\left(\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)\right)^2 \tag{31}$$

が成り立つ。(14) よりこれが a_n で割り切れることは明らかである。ヨーロッパでは

$$D(f)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_n^{-1}\mathcal{R}(f,f')=a_n^{2n-2}\left(\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)\right)^2 \tag{32}$$

を多項式 $f(x)$ の「判別式」というが、關たちは、符号には関心を払わず、

$$\mathcal{D}(f)=a_n^{-1}\mathcal{R}(f,f')=n^{2-n}\mathcal{R}(nf-xf',f') \tag{33}$$

を適盡方級法と呼んでいる。

「開方飜變之法」には 4 次までの方程式に対する $\mathcal{D}(f)$ があり、「大成算經」巻之三では 5 次方程式の $\mathcal{D}(f)$ 59 項がほぼ正しく計算されている。「開方飜變之法」の主題は方程式 (1) の正負の根の個数を知ることであった。ところが、不思議なことに、実係数 2 次方程式の実根の個数が判別式の符号で分かるという今では誰でも知っていることに気づいていない。

参考文献

1. 著者不詳, 九章算術, ca. 100; 川原秀城訳 劉徽註九章算術, 中国天文学・数学集, 朝日出版社, 1980, pp. 75–271.
2. 楊輝, 楊輝算法, 1275, 1378, 朝鮮で 1433.
3. 朱世傑, 算學啓蒙, 1299.
4. 程大位, 算法統宗, 1593.
5. 吉田光由, 塵劫記, 1627, 1629, 1631, 1634, 1641.
6. 澤口一之, 古今算法記, 1670.
7. 關孝和, 發微算法, 1674; 關孝和全集, 大阪教育図書, 1974, pp. 105–119.
8. 關孝和, 解見題之法; 關孝和全集, pp. 123–130.
9. 關孝和, 解隱題之法, 1685; 關孝和全集, pp. 133–139.
10. 關孝和, 解伏題之法, 重訂1683; 關孝和全集, pp. 142–158.
11. 關孝和, 開方飜變之法, 1685; 關孝和全集, pp. 159–170.
12. 建部賢弘, 發微算法演段諺解, 1685; 關孝和全集, pp. 511–572.
13. 田中由眞, 算學紛解, 8 巻中 巻之一, ca. 1690.
14. 井關知辰, 算法発揮, 1690.
15. 關孝和-建部賢明-建部賢弘, 大成算經, 2 0 巻中 巻之二、三及び十七, 1683–1710.
16. 寺内(松永)良弼, 解伏題交式斜乗之諺解, 1715.
17. 戸板保佑, 生尅因法傳, 1759.
18. 菅野元健, 補遺解伏題生尅篇, 1798.
19. 石黒信由, 交式斜乗逐索, 1798.
20. 藤田嘉言, 開方翻變五條 關夫子編述 藤田嘉言鮮之, 1811.
21. Tsuruichi Hayashi, *Seki's Kaihō-Honpen, Hōjin-Ensan, and Sandatsu-Kempu* 關孝和ノ開方飜變、方陣圓攢及算脱驗符, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. **3** (1906); 林鶴一博士和算研究集録上巻, 1937, pp. 509–529.
22. Tsuruichi Hayashi, *The "Fukudai"* (伏題) *and determinants in Japanese mathematics*, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. **5** (1910), 254–271; 林鶴一博士和算研究集録上巻, 1937, pp. 570–589.
23. Yoshio Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*, Teubner, Leibzig, 1913.
24. D. E. Smith and Yoshio Mikami, *A history of Japanese mathematics*, Open Court Publishing, Chicago, 1914.
25. Yoshio Mikami, *On the Japanese theory of determinants*, Isis **2** (1914), 9–36.
26. 三上義夫, 石黒信由の行列式論, 東京物理学校雑誌 **25** (1916), 560–566.
27. 三上義夫, 關孝和の業績と京阪の算家並びに支那の算法との關係及び比較, 東洋学報 **20** (1932), 217–249, 543–566, **21** (1933), 45–65, 352–373, 557–575, **22** (1935), 54–99.
28. 平山諦, 田中由眞と菅野元健との行列式, 東京物理学校雑誌 **46** (1937), 280–285, 347–350.
29. 三上義夫, 日本行列式研究の経過, 東京物理学校雑誌 **46** (1937), 435–440, 487–489, 531–534.
30. 加藤平左エ門, 方程式論, 日本学術会議, 1955.
31. 日本學士院編, 明治前日本數學史, vol. 2, 3, 岩波書店, 1956, 1957.
32. 平山諦, 関孝和, 恒星社厚生閣, 1959; 増補 1974.
33. 加藤平左エ門, 算聖関孝和の業績, 槙書店, 1972.
34. 三上義夫、平山諦・大矢真一・下平和夫編, 文化史上より見たる日本の数学, 恒星社厚生閣, 1984.
35. Annick Horiuchi, *Les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo (1600-1868) : une étude des travaux de Seki Takakazu (? -1708) et de Takebe Katahiro (1664-1739)*, J. Vrin, Paris, 1994.
36. 竹之内脩, 関孝和の解伏題之法について, 大阪国際大学紀要 国際研究論叢 **12** (1998), 1–14.
37. 竹之内脩, 和算における行列式について, 大阪国際大学紀要 国際研究論叢 **13** (1999), 33–50; 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 **1130** (2000), 245–262.

38. 竹之内脩, 田中由真の終結式について *The construction of resultant due to Tanaka Yoshizane*, 和算研究所紀要 **2** (1999), 3–18.
39. 後藤武史, 大成算經の前集の研究; 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 **1195** (2001), 128–138.
40. René Descartes, *La Géométrie*, 1637; *The Geometry of Rene Descartes*, Open Court Publishing, 1925; Dover, 1954.
41. Isaac Newton, *Arithmetrica Universalis*, 1707; *Opera Quae Exstant Omnia*, vol. I, 1779.
42. L. Euler, *Démonstration sur le nombre des points où deux lignes des ordres quelquonques peuvent se couper*, Mémoires Acad. Sci. Berlin **4** (1748), 234–248; *Opera Omnia*, vol. I - XXVI, 1953, pp. 46–59.
43. Gabriel Cramer, *Appendice I, II de l'évanouissement des inconnues* in *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750, pp. 656–676.
44. L. Euler, *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations*, Mémoires Acad. Sci. Berlin **20** (1764), 91–104; *Opera Omnia*, vol. I - VI, 1921, pp. 197–211.
45. E. Bézout, *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations*, Mémoires Acad. Royale Sci. Paris (1764), 288–338.
46. Meier Hirsch, *Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra*, Berlin, 1804.
47. J. J. Sylvester, *A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree*, Phil. Magazine **16** (1840), 132–135; *The Collected Mathematical Papers*, vol. I, pp. 54–57.
48. A. Cauchy, *Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques*, Exercices d'analyse et de physique mathématique **1** (1840); *Œuvres Complètes*, vol. II - XI, 1913, pp. 466–509.
49. A. Cayley, *The theory of determinants*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **8** (1843), 1–16; *The Collected Mathematical Papers*, vol. I, pp. 63–79.
50. J. J. Sylvester, *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure*, Phil. Trans. Royal Soc. London **143** (1853), 407–548; *The Collected Mathematical Papers*, vol. I, pp. 429–586.
51. A. Cayley, *Memoir on the resultant of a system of two equations*, Phil. Trans. Royal Soc. London **147** (1857), 703–715; *The Collected Mathematical Papers*, vol. II, pp. 440–453.
52. D. Hilbert, *Über die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36** (1890), 473–534.
53. Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra, Bd. I, 2. Aufl.*, Vieweg, Braunschweig, 1898.
54. 高木貞治, 代数学講義, 共立出版, 1948.
55. Takehisa Abe and Seiji Fujino, *Seki and Surrus, and Again Sarrus – Relating to a History of the Theory of Elimination –* ; *Proceedings of the Fourth International Symposium on the History of Mathematics and Mathematical Education Using Chinese Characters: Maebashi 1999*, 2001, pp. 103–115.

Determinants, resultants and discriminants in Japan in the seventeenth century and in Europe in the eighteenth and nineteenth centuries

Takefumi Goto and Hikosaburo Komatsu

It is by now well known that Japanese mathematicians introduced determinants in the seventeenth century as a means of eliminating an auxiliary unknown from a system of algebraic equations with more than one unknowns. Less known are the details of their method and the reason why it works, even to the historian of Japanese Mathematics. We pursue their calculations mainly in two papers of Seki Takakazu (1642?–1708) dated 1683 and 1685 and in 'Complete Books of Mathematics' written in 1683–1710 by Seki, Takebe Kataakira (1661–1716) and Takebe Katahiro (1664–1739), and show that their method of elimination is the same as that in a paper of Etienne Bézout (1739–1783) submitted to the Academy in Paris in 1764.

Given two algebraic equations $f = 0$ and $g = 0$ of degree n, they construct n equations of degree less than n as linear combinations of the original with polynomial coefficients. Then, the resultant $R(f, g)$ is defined to be the determinant of their coefficients. Equating it to 0, we obtain an eliminated equation. Compared with the method of Euler (1764) and Sylvester (1840), this reduces the size of the defining determinant to a half.

In the second paper Seki introduced the discriminant of an equation $f = 0$ as the resultant of f and its derivative f'. His motivation was to know the change of numbers of positive or real roots as a coefficient of the equation varies but he didn't care about the sign of the discriminant. A possible reason is that in their terminology a polynomial f could not be distinguished from the equation $f = 0$.

Seki's first paper had an error with regard to the expansion of determinants of order ≥ 5. Although many corrections have been published since 1715, none of them convince us. We propose a new one instead.

以上は 2002 年 6 月に日本科学史学会の邦文機関誌「科学史研究」に投稿した論文である。2002 年 11 月 14 日付けで「掲載不可」と判定され返されてきた。これには次の「審査結果」が添えられていたが、われわれは納得することができなかった。この「審査結果」は虚偽の論拠によっていると思われたので、はじめはこの雑誌に発表することを奨めて下さった方を通じて非公式に、そして 2003 年 6 月以降は伊東俊太郎会長宛に公式に、判定は学会の自由であるとしてもこの「審査結果」は、これを公の場で説明して下さるか、それができないなら学会の判断でわれわれに理解できるものに書き直して欲しいと要求してきた。会長からは形式的な返事はもらったが、内容に及ぶものでなかった。審査に当たった「科学史研究」編集委員会（委員長　山崎正勝、委員　綾野博之、石山洋、井原聡、梶雅範、佐藤賢一、中村邦光、廣政直彦、松原洋子、矢野道子）からは何の返答もなかった。そのため 8 月末の研究集会の後 9 月 19 日付けで山崎委員長宛に送った手紙がその次のものである。これに対しても 10 月 15 日になって、7 月に交代したという次期の兵藤友博委員長から小松は会員ではないから投稿を受理したのが間違いであったという無署名の返書をもらっただけである。しかし、投稿したのは後藤武史会員であって、未入会の小松彦三郎ではなかったことを注意しておきたい。

なお、この論文のおおよその内容は次の 3 つの論文として既に出版されている。

T. Goto–H. Komatsu, *Determinants, resultants and discriminants in Japan in the seventeenth century and in Europe in the eighteenth and nineteenth centuries*, J. Northwest Univ. Natural Science Edition **33** (2003), 363–367.

T. Goto–H. Komatsu, *A correction of Seki's error in the expansion of determinants*, J. Northwest Univ. Natural Science Edition **33** (2003), 376–380.

小松彦三郎, 漢文で数学はできるか, 科学 **73** (2003), 1159–1164.